Operatory w przestrzeniach L_p
Lista 4 (kompleksyfikacja i miary semi-skończone)

Zad 1. Niech $\mathcal{M}$ będzie domkniętą podkratą rzeczywistej przestrzeni $L_p(\mu)$, gdzie $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą skończoną, i niech $\mathcal{M}$ zawiera jedynkę (funkcję tożsamościowo równą 1). Pokazać, że zbiór $\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{F} : 1_A \in \mathcal{M}\}$ jest σ-algebrą (σ-podalgebrą $\mathcal{F}$).

Zad 2. Niech T będzie $\mathbb{R}$-liniowym operatorem na rzeczywistej przestrzeni liniowej X. Pokazać, że wzór

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) := Tx + iTy, \qquad x, y \in X$$

definiuje operator $\mathbb{C}$-liniowy na kompleksyfikacji $X_{\mathbb{C}} := X \oplus X$ przestrzeni X. Elementy kompleksyfikacji zapisujemy $x + iy$ (zamiast $x \oplus y$) dla $x, y \in X$. Jest to zespolona przestrzeń liniowa z działaniami

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v), \qquad (a + ib)(x + iy) := (ax - by) + i(bx + ay),$$

$x, y, u, v \in X$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zad 3. Pokazać, że zespolona przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$ jest kompleksyfikacją rzeczywistej przestrzeni $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$.

Zad 4. Niech T będzie $\mathbb{C}$-liniowym operatorem na zespolonej przestrzeni $L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne

1) T jest *rzeczywisty*, tzn. zachowuje podbiór funkcji rzeczywistych $L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$,

2) T jest kompleksyfikacją $\mathbb{R}$-liniowego operatora $T^{\mathbb{R}} : L_p^{\mathbb{R}}(\mu) \to L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$,

3) T zachowuje sprzężenie, tzn $T\overline{z} = \overline{Tz}$ dla każdego $z \in L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$.

Zad 5. Pokazać, że dla dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) rodzina zbiorów o mierze skończonej $\Sigma_0 := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$ tworzy *warunkowy σ-pierścień*, tzn. pierścień, który jest zamknięty na przeliczalne sumy majoryzowane przez element z Σ_0:

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_0 \text{ oraz } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq B \text{ dla pewnego } B \in \Sigma_0 \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_0.$$

Zad 6. Niech $\mu : \Sigma_0 \to [0, +\infty)$ będzie σ-addytywną funkcją zbioru określoną na pewnym warunkowym σ-pierścieciu Σ_0 podzbiorów Ω.[1] Pokazać, że rodzina

$$\Sigma := \{A \subseteq \Omega : A \cap B \in \Sigma_0 \text{ dla każdego } B \in \Sigma_0\}$$

jest σ-algebrą zawierającą Σ_0 oraz wzór

$$\overline{\mu}(A) := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \Sigma_0\}$$

definiuje miarę na Σ taką, że $\overline{\mu}|_{\Sigma_0} = \mu$.

Zad 7. Mówimy, że miara μ jest *semi-skończona*, jeżeli dla dowolnego $A \in \Sigma$ takiego, że $\mu(A) = \infty$ istnieje $B \in \Sigma$ taki, że $B \subseteq A$ oraz $0 < \mu(B) < \infty$. Pokazać, że miara μ jest semi-skończona wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu = \overline{\mu}$, gdzie μ jest miarą zdefiniowaną w Zadaniu 6 dla $\Sigma_0 := \{A \in \Sigma : \mu(A) < \infty\}$.

Zad 8. Niech (Ω, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą. Pokazać, że μ jest σ-skończona wtedy i tylko wtedy, gdy μ jest semi-skończona i jest równoważna pewnej mierze skończonej ν na Σ.[2]

---

[1] σ-addytywność oznacza tu, że jeżeli $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_0$ są parami rozłączne i ich suma należy do Σ_0, to $\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

[2] Równoważność miar oznacza, że rodziny zbiorów miary zero dla obu miar się pokrywają